



## Similitudes

### I- Homothéties

Une homothétie de rapport  $\lambda$  ( $\lambda$  réel non nul) :

conserve	transforme	multiplie
Les mesures angles orientés	Une droite en une droite parallèle	Les distances par $ \lambda $

### II- Similitudes directes

#### II-1. Définition :

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et qui conserve les mesures des angles orientés.

#### Conséquences :

- ✓ Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
- ✓ Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement.
- ✓ Une similitude directe, qui n'est pas une translation, admet un unique point invariant  $\Omega$  appelé son centre.

#### II- 2. Propriétés :

Une similitude directe  $s$  est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts  $A$  et  $B$  et de leur image  $A'$  et  $B'$ .

**Eléments caractéristiques** est la similitude directe transformant  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$

Le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$  de  $s$  sont donnés par :  $k = \frac{A'B'}{AB}$  et  $\theta \equiv \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \right) [2\pi]$ .

Lorsque  $s$  n'est pas une translation :  $s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k \cdot \Omega M \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi], M \neq \Omega \end{cases}$

#### Forme réduite (canonique)

Si  $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  alors  $s = R(\Omega, \theta) \circ H(\Omega, k) = H(\Omega, k) \circ R(\Omega, \theta)$

**Classification:** Soit  $s$  une similitude directe de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ . Le tableau ci-dessous énumère les différentes formes que peut prendre  $s$  :

$K = 1$	$\theta = 0$ translation	$\theta = \pi$ symétrie centrale	$\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ rotation d'angle $\theta$
$K \neq 1$	Homothétie de rapport $k$	Homothétie De rapport $-k$	Similitude directe à centre , de rapport $k$ et d'angle $\theta$

#### Propriétés

- ✓ Une similitude directe de centre  $\Omega$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$  est une bijection et sa bijection réciproque est une similitude directe de même centre  $\Omega$ , de rapport  $\frac{1}{k}$  et d'angle  $-\theta$ .
- ✓ La composée de deux similitudes directes de rapports respectifs  $k$  et  $k'$  et d'angles respectifs  $\theta$  et  $\theta'$  est une similitude directe de rapport  $k.k'$  et d'angle  $\theta + \theta'$ .

## Similitudes

### II-3. Construction du centre d'une similitude directe :

1. Si  $s$  est donnée par son rapport  $k$ , son angle  $\theta$  et un point  $A$  et son image  $A'$  alors  $\Omega$  est l'unique point d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{ M, M \in P / \frac{MA'}{MA} = k \right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{ M, M \in P / \left( \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \right) \equiv \theta [2\pi] \right\}$$

- 2 Si  $s$  est donnée par deux points distincts  $A$  et  $B$  et leur images  $A'$  et  $B'$  alors le centre  $\Omega$  de  $s$  est le point d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{ M, P \in P / \left( \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'} \right) \equiv \theta [2\pi] \right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{ M, P \in P / \left( \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB'} \right) \equiv \theta [2\pi] \right\}$$

### II-5. Similitude directe et nombre complexe :

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes avec  $a$  non nul.

L'application  $z \mapsto a.z + b$  est l'écriture complexe d'une :

- ✓ la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $b$ , lorsque  $a = 1$ .
- ✓ la similitude directe de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\theta$  un argument de  $a$  et de centre  $\Omega$  le point d'affixe  $\omega$  tel que  $\omega = a.\omega + b$ , lorsque  $a \neq 1$ .

## III- Similitudes indirectes

### III-1. Définition :

Une similitude indirecte est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et renverse les mesures des angles orientés.

#### Conséquences :

- ✓ Une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte de rapport 1 est un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte qui n'est pas un antidéplacement admet un unique point invariant : son centre.
- ✓ Une similitude indirecte  $\sigma$  est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts  $A$  et  $B$  et de leur image  $A'$  et  $B'$ . Le rapport de  $s$  est :  $k = \frac{A'B'}{AB}$

### III-2. Propriétés

Soit  $\sigma$  est une similitude indirecte de rapport  $k \neq 1$  :

**Forme réduite :**  $\sigma = H(\Omega, k) \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ H(\Omega, k)$  où  $(\Delta)$  est l'axe de  $\sigma$ ,  $\underline{\Omega \in \Delta}$ .

Remarquons que :  $\sigma \circ \sigma = H(\Omega, k^2)$  .

**Axe :** Soit  $M$  un point  $M$  distinct de  $\Omega$  d'image  $M'$  par  $\sigma$ ,

- ✓ lorsque les points  $\Omega$ ,  $M$  et  $M'$  ne sont pas alignés,  $(\Delta)$  est la bissectrice intérieure de l'angle  $\left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right)$  .
- ✓ lorsque les points  $\Omega$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés tels que  $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ ,  $\Delta = (\Omega M)$  .
- ✓ lorsque les points  $\Omega$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés tels que  $\overrightarrow{\Omega M'} = -k \overrightarrow{\Omega M}$ ,  $\Delta$  est la perpendiculaire à la droite  $(\Omega M)$  en  $\Omega$  .

#### Composition :

- ✓ la composée d'une similitude directe de rapport  $k$  et d'une similitude indirecte de rapport  $k'$  est une similitude indirecte de rapport  $kk'$ .
- ✓ la composée de deux similitudes indirectes de rapports  $k$  et  $k'$  est une similitude directe de rapport  $kk'$ .